АГ Иванов 4.12.12

Фигури от втора степен. Криви и повърхнини от втора степен

$x_1 x_2 x_3 x_4$ - хомогенни координати

$$F(M) = \sum_{i,j=1}^{4} a_{ij} x_i x_j = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{44}x_4 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \dots + 2a_{34}x_3x_4$$

$$X^t a X$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = X^t a X = (x_1 x_2 x_3 x_4) \begin{pmatrix} a_{ij} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Фигура от втора степен се дефинира с $F(M) = 0$

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} - a_{14} \\ | & \ddots & | \\ a_{41} & - & a_{44} \end{pmatrix}$$ и $A = A^t$ т.е. симетрична

$$F_1(M) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_1} F(x_1x_2x_3x_4) = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4$$

$$F_2(M) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_2} F(x_1x_2x_3x_4) = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4$$

$$F_3(M) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_3} F(x_1x_2x_3x_4) = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4$$

$$F_4(M) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_4} F(x_1x_2x_3x_4) = a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4$$

Тъждество на Ойлер

$$F(x_1x_2x_3x_4) = \sum_{i=1}^{4} x_i F_i(x_1x_2x_3x_4)$$

Нека имаме $M(x_1x_2x_3x_4)$ и $N(y_1y_2y_3y_4)$

$$F(MN) = \sum_{i=1}^{4} y_i F_i(M) = \sum_{i=1}^{4} y_i F_i(x_1x_2x_3x_4) = \sum_{i=1}^{4} x_i F_i(y_1y_2y_3y_4)$$

(полярна форма)

св-во

1) $F(MN) = F(NM)$ - симетричност

Деф.

MN са полярно спрегнати ако $F(MN) = 0$

Деф

M е особена за повърхнината α ако $F_1(M) = _ = F_4(M) = 0$

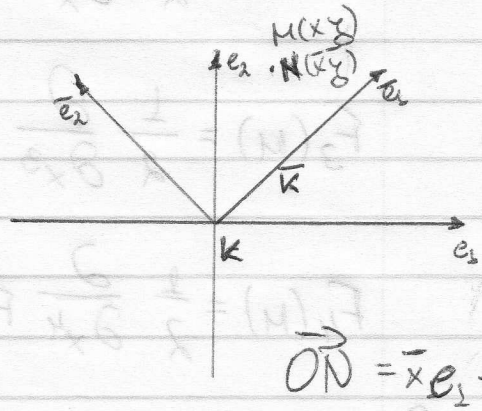
Ако M е особена за $\alpha \Rightarrow M \in \alpha$ и $\det(A) = 0$

1) K - ортономирана - $\bar{X} = OX$ (O-ортогонална матрица $OO^t = E_n$)
2) K - афинна - T_{2x2} $\bar{X} = T_2X$ $\det(T) \neq 0$
3) K - проективна - $K(A_1A_2A_3E) \to \bar{K}(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3\bar{E})$ и съществува неособена матрица T т.че

$$\bar{X} = T_3X \quad \text{т.е. } T_{3x3}$$

Подсъществуване $O \subset T_2 = \begin{pmatrix} T_2 & x \\ x & 1 \end{pmatrix} \subset T_3$

преобразуване наточие в равнината



Нека K

$\bar{e} = T^te$

$X = T\bar{X}$

$\bar{X}^t\bar{e} = \bar{x}^tT^te = x^te$ (спрямо K)

$\bar{x}^tT^t = x^t$ $\quad x = T\bar{x}$ $\quad N(\bar{x}\bar{y})$ $\quad \vec{ON} = \bar{x}e_1 + \bar{y}e_2$

Криви

$X = T_3 \bar{X} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = T_3 \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{pmatrix}$ векторен стълб

$X^t A X$ - квадратична форма

$X^t = \bar{X}^t T^t \Rightarrow F(\bar{x}) = \bar{X} T_3^t A T_3 \bar{X} = \bar{X}^t \bar{A} X$

$\bar{A} = T_3^t A T_3 \Rightarrow$ T от A подобни матрици

За всяка симетрична матрица съществува неособена такава $\Rightarrow \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & \\ & \varepsilon_2 & \\ & & \varepsilon_3 \end{pmatrix} = \bar{A} = T_3^t A T_3$

$\Rightarrow X^t A X \Rightarrow \bar{X}^t \bar{A} X = \varepsilon_1 x_1^2 + \varepsilon_2 x_2^2 + \varepsilon_3 x_3^2 + \varepsilon_4 x_4^2$

$(\varepsilon_i = \pm 1, 0)$

Проективна класификация на кривите от втора степен

Деф

Крива, която съдържа особена точка се нарича изродена крива $\Rightarrow$

Еквивалентно на $\det(A) = 0$

Разглеждаме уравнението на кривата

$\varepsilon_1 x_1^2 + \varepsilon_2 x_2^2 + \varepsilon_3 x_3^2 = 0$

1 сл) $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3$ – еднакви знаци

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ – неизродена

(без реални точки)

2 сл) $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1 \quad \varepsilon_3 = -1$

$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ – неизродена крива

(овална крива)

3 сл) $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \quad \varepsilon_3 = 0$

$x_1^2 + x_2^2 = 0$ – изродена крива

(без реална точка)

$\Leftrightarrow (x_1 + ix_2)(x_1 - ix_2) = 0$

(две комплексно спрегнати прави)

4 сл) $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 \quad \varepsilon_3 = 0$

$x_1^2 - x_2^2 = 0 \Rightarrow (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = 0$ – изродена

(две реални прави (пресичащи се))

5 сл) $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0 \Rightarrow x_1^2 = 0$ – двойна реална права

Проективна класификация на повърхнини от втора степен

$$\mathcal{L} = \varepsilon_1 x_1^2 + \varepsilon_2 x_2^2 + \varepsilon_3 x_3^2 + \varepsilon_4 x_4^2 = 0$$

$$\boxed{\bar{A} = T^t A T} \quad \det(\bar{A}) = \det(A)\underbrace{(\det(T))^2}_{\neq 0} \Rightarrow$$

1 сл не може да се преобразува и да отиде във 2 сл или в останалите случаи

Разглеждаме уравнението на $\mathcal{L}$:

$$\varepsilon_1 x_1^2 + \varepsilon_2 x_2^2 + \varepsilon_3 x_3^2 + \varepsilon_4 x_4^2 = 0$$

1сл) $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4$

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$ – нетривиална повърхнина без реални точки

2сл) $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\varepsilon_4$

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0$ – нетривиална повърхнина $\det(A) = -1$

3сл) $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -\varepsilon_3 = -\varepsilon_4$

$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 0$ – нетривиална активен хиперболоид $\det(A) = 1$

4сл) $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 \quad \varepsilon_4 = 0$

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ – тривиална $\det(A) = 0$

имагинарен конус ((0,0,0,1) – 1 реална точка)

5сл) $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -\varepsilon_3 \quad \varepsilon_4 = 0$

$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ – тривиална

конус

6сл) $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 0$

$x_1^2 + x_2^2 = 0$ – тривиална $\det(A) = 0$

$(x_1 + ix_2)(x_1 - ix_2) = 0$ – две комплексно спрегнати равнини (пресичащи се)

7сл) $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 0$

$x_1^2 - x_2^2 = 0 \Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2)$ – тривиална

две пресичащи се реални равнини

8сл) $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 0$

$x_1^2 = 0$ – двойна равнина

Полярност спрямо фигура от втора степен

$\alpha: X^t A X = 0 = \sum_{i,j=1}^{4} a_{ij} x_i x_j = 0$

Нека $M(x_{10}x_{20}x_{30}) \in \overline{R^2}$ и е фиксирана

$$F(MN) = 0 \qquad N(y_1 y_2 y_3) \Rightarrow$$

$$F(MN) = \sum_{i=1}^{4} y_i F_i(M) = 0$$

$$\alpha(M) = \begin{cases} \text{всички точки } N(y_1 y_2 y_3) \\ \text{които са полярно спрегнати} \\ \text{на точката } M \end{cases}$$

Търсим $F(MN) = 0 = y_1 F_1(M) + y_2 F_2(M) + y_3 F_3(M) = 0$

Ако M е неособена за α то $\alpha(M)$ е уравнение на права

Деф

За всяка неособена точка M, правата $\alpha(M)$ се нарича <u>полярна</u> на M, а точката M се нарича <u>полюс</u> на правата $\alpha(M)$

Ако M е особена то всяка права е нейна полюра

Да намерим колко са пресечните точки на кривата K от втора степен с права

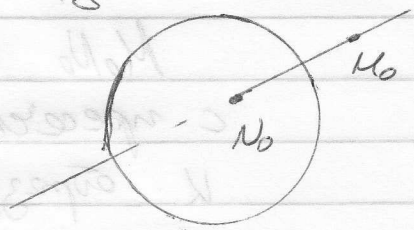
$$K : \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} x_i x_j$$

Разглеждаме $M_0(x_{10} x_{20} x_{30})$ и $N_0(y_{10} y_{20} y_{30})$

$$(MN) : \lambda M_0 + \mu N_0 = P \quad (P \text{ е точка от правата})$$

$$(x_1 P x_2 P x_3 P) = \lambda(x_{10}x_{20}x_{30}) + \mu\begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ x_{30} \end{pmatrix}$$

$$k = X^t A X = 0$$

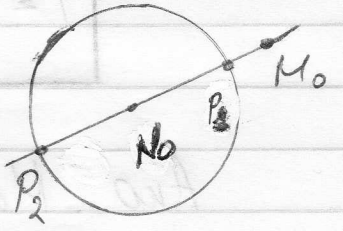


$MN \qquad P = \lambda M_0 + \mu N_0$

$$k \cap MN = X_p^t A X_p = (\lambda x_0^t + \mu_{y_0}^t) \Rightarrow$$
$$A(\lambda x_0 + \mu_{y_0}) = \lambda^2 F(M_0) + \mu^2 F(N_0) + 2\lambda\mu F(M_0N_0)$$
(квадратно уравнение)

Деф
Права се нарича секуща ако има две пресечни точки с крива $k(D>0)$, допирателна ако има една пресечна точка с крива $k(D=0)$ и несекуща, ако няма нито една пресечна точка с крива $k(D<0)$

Разглеждаме секуща



I сл) M_0N_0 – секуща – $D>0$

от Виет $\Rightarrow$

$$\frac{\lambda_1}{\mu_1} + \frac{\lambda_2}{\mu_2} = -\frac{2F(M_0N_0)}{F(M_0)} \qquad P_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1},\ P_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_2}$$

Ако $F(M_0N_0) = 0$ т.е. M_0N_0 полярно спрегнати

$$\Rightarrow \frac{\lambda_1}{\mu_1} + \frac{\lambda_2}{\mu_2} = 0$$

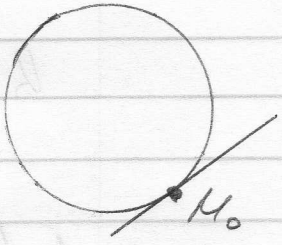
$$P_1 = \lambda_1 M_0 + \mu_1 N_0$$
$$P_2 = \lambda_2 M_0 + \mu_2 N_0$$

$$(M_0N_0P_1P_2) = \frac{\lambda_2\mu_1}{\lambda_1\mu_2} \text{ – двойно отношение} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lambda_1\mu_2 + \mu_1\lambda_2 = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda_1 M_2 = -\lambda_2 M_1 \Rightarrow -1 = \frac{\lambda_2 M_1}{\lambda_1 M_2}$$

M_0N_0 са хомоложно спрегнати $\Leftrightarrow$ защото с пресечните точки $e_1 e_2$ на правата M_0N_0 с k образуват хармонична група т.е. $(M_0N_0P_1P_2) = -1$

Разглеждаме допирателна



I сл) M_0N_0 - допирателна $D=0$ т.е. $F^2(M_0N_0) - F(M_0)F(N_0)$

Нека $M_0 \in k \Rightarrow F(M_0)=0$ тогава $D=0$ е еквивалентно с $F(M_0N_0)=0$

$$\frac{\lambda}{\mu} = -\frac{F(M_0N_0)}{F(M_0)}, \quad P = \lambda M_0 + \mu N_0$$

$$\boxed{P = -F(M_0N_0)M_0 + F(M_0)N_0}$$

допирателна точка

Ако $M_0 \in k \Rightarrow D=0 \Leftrightarrow F(M_0N_0)=0$ (хомоложно спрегнати)